Tőkepiaci matematikai modellek

GYÖRKE LÁSZLÓ

A kereskedelem megjelenése óta foglalkoztatja az embereket az a dilemma, hogy az árujuk mennyit is ér. A gazdálkodó ember mindig előbukkanó kérdése, hogy milyen terméket vessen el, melyik veteményből lesz nagyobb termés. Az ipari termelés is hasonló kérdést vetett fel: mit érdemes termelni, mire lesz kereslet a jövőben, mit lehet jobban eladni? A modern pénz és tőkepiacok befektetői sem szabadulnak meg ezen kérdéstől. Tőkéjük növelése érdekében befektetéseket eszközölnek. De mibe is érdemes befektetni, melyik az az az értékpapír, amely a legnagyobb hozamot eredményezi? Elvárásuk az, hogy a kínált lehetőségekből a lehető legtöbb információt kapják. A jól működő tőkepiacok elengedhetetlen része az információszolgáltatás, illetve -felhasználás. Aki először szerzi meg az információt, az a piac többi szereplőjéhez képest többlethozamra tehet szert, mindaddig, amíg az információ a piac összes szereplőjéhez eljut. A hatékonyan működő piacon az információ beépül az árba. Az információ árba való beépülésének sebessége függ a piac hatékonyságától. A hatékony piacok fő kérdése, hogy vannak-e ilyen információk, és ha igen, akkor hogyan lehet ezekhez hozzájutni. Kutatók csoportjai próbálták az árfolyamokat előrejelezni. Az árfolyamok alakulását matematikai modellekkel jellemezték. A tudósok bíztak benne, hogy a természeti jelenségeket leíró matematikaképletekkel jól lehet modellezni az árfolyamok alakulását, néhány egyszerűbb modelltől egészen a bonyolult modellekig több kísérletet tettek az árfolyamok előrejelzésére, de sajnos mindmáig nem tudjuk pontosan előrejelezni az áruk árfolyamának változását.

A cikk első részében a tőkepiacokat ismertetem. Ezek után egy egyszerű binomiális modell, majd a bonyolultabb Brown-mozgás, Pareto-eloszlásmodellek következnek. A cikk harmadik részében két alkalmazás található: az első a fraktálokkal való modellezést mutatja be, a második pedig átfogóbb képet nyújt az árfolyamváltozásokról.

1. Gazdasági háttér

1.1. Ismerkedés a tőkepiacokkal

Mi is az a tőkepiac? A tőkepiacnak több összetevője van. A termeléssel létrehozott anyagi termelési tényezők, valamint a pénz és értékpapírok együtt alkotják a tőkepiacot. Ezen belül a értékpapírpiacról beszélnék kicsivel bővebben.

Értékpapírpiacok

Már az ókorban léteztek a kereskedéshez kapcsolódóan bizonyos kezdeti pénzeszközök. A XVI. században megindult az ipari fejlődés, és ez nagymértékű tőke

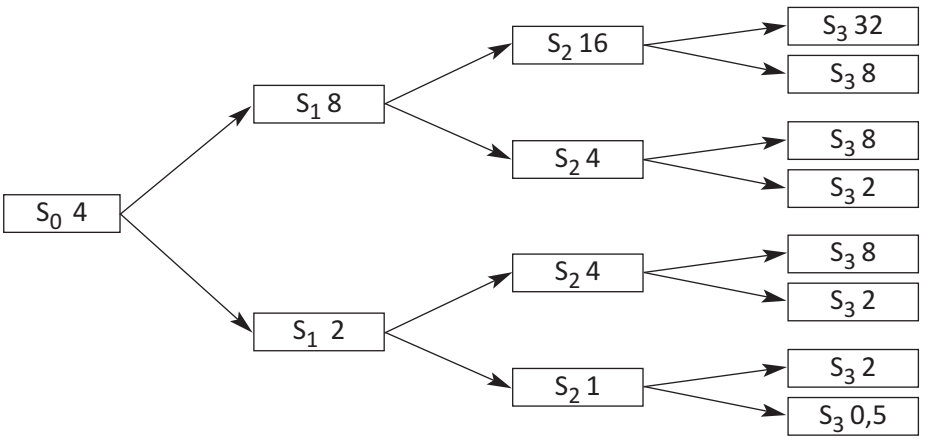
(pénz) bevonást igényelt. Ezenkívül a kereskedők is összefogtak, hajót béreltek, és Indiába vitték a saját árujukat, és onnan fűszereket hoztak be. Ezeket jó áron eladták, és osztoztak a hozamon.

Az első részvény kibocsátása 1595-ben történt, 1602-től a részvényeket már papír formájában bocsátották ki. 1622-ben a Kelet-Indiai Társaság részvényt bocsát ki, melyet minden nemzetiségű és nyelvű kereskedő használt. 1605-ben az első osztalék kifizetése is megtörtént, igaz, borsban, és nem pénzben. Az első árutőzsdét 1760-ban jegyezték. Később Párizsban és a nyugati fővárosokban is létrejöttek a tőzsdék, ez magával hozta a szabályozottság igényét is. Napjaink értékpapírpiacai már teljesen elszámítógépesedtek. Manapság a tőzsdéken csak bizonyos számítógépes programokkal lehet kereskedni. Azért említettük a tőzsdét és nem az értékpapírpiacot, mert a tőzsde a tőkepiac színtere, és tudjuk, hogy ez magába foglalja az értékpapírpiacot illetve még sok más pénzpiacot.

2 Matematikai modellek

2.1 Binomiális modell

Ez egy egyszerű eszközárazási modell. Azt feltételezzük, hogy az árfolyam minden időpillanatban változik. Két lehetséges változás van, vagy emelkedik, vagy csökken az árfolyam. Feltételezzük hogy a kezdeti időpillanatban S_0 az árfolyam, és vegyünk két pozitív számot: $0<d<1<u$, úgy, hogy a következő időpillanatban az árfolyam dS_0 vagy uS_0 legyen. Ha az árfolyam növekedik, akkor az S_0-ról a dS_0-ra növekszik az ár, illetve ha csökken, akkor az S_0-ról az uS_0-ra csökken az árfolyam. Általában a $d=1/u$ egyenlőséggel dolgozunk, így lesz majd a példában is. Vegyük a következő példát, S0=4,d=0.5,u=2, és három időpillanaton át vizsgáljuk az árak változását.



Amint a példán is látjuk, nagyon jól követhető az árak változása. Jelöljük N-nel a növekedés pillanatát és Z-vel az árak zuhanását. A Ω={NNN, NNZ, NZN, NZZ, ZNN,

ZNZ, ZZN, ZZZ} halmaz jelöli az összes lehetséges árváltozást. Ezen módszerrel elég jó előrejelzéseket tudnánk adni a valószínűségszámítás segítségével. Sajnos ezen modell túl egyszerű az árak modellezéséhez, de jó példa azok megértéséhez.

2.2. Fair play

Luis Bachelier (1870–1946) 1900-ban adta be doktori értekezését a párizsi Sorbonne egyetemen Poincré professzor irányítása alatt. Dolgozata címe: *Theory of Speculation*. Bachelier matematikus volt, de érdekelték a gazdasági jelenségek is, így dolgozatában a tőzsdei árfolyam-alakulásokkal foglalkozott. Szerinte az árfolyamra rengeteg tényező hat, többek közt a múltbeli árfolyamalakulások és jelen események. A jövőre vonatkozó várakozások tükröződnek az árak alakulásában. Mivel rengeteg (végtelen számú) tényező hat az árfolyamok alakulására, így Bachelier szerint nem lehet azt előre megjósolni. Az általa felállított modell nem adja meg pontosan az árfolyamváltozásokat, de bizonyos valószínűségek meghatározásával előrejelzést ad. A felépített modell egyik alapfeltétele, hogy a piacra bekerülő új információ a különböző befektetőkből ellentétest hatást vált ki, vagyis lesznek, akik vásárolni fognak, és lesznek, akik eladni szeretnének. Ennek következménye, hogy az ár nem fog változni, mivel ugyanannyian akarnak majd vásárolni, mint eladni. Egy t pillanatban az eladni szándékozók nem számítanak áremelkedésre, ezzel szemben akik vásárolnak, számítanak arra. Amennyiben az elvárt hozamot az emelkedés valószínűségével és az áremelkedés mértékének szorzataként értelmezzük, akkor senki sem fog többlethozamra szert tenni. Ezt nevezzük fair játszmának. A Bachelier által megfogalmazott fair játszma kimondta, hogy hosszú távon a valóságban realizált hozamok megegyeznek az elvárt hozammal:

$$E(r_{i,t+1} \mid \phi_t) = r_{i,t+1} \ ,$$

ahol Φt a t-edik időpontban nyilvános információk halmaza, $E(r_{i,t+1} \mid \phi_t)$ az i-edik eszköz várható hozama t és t+1 időpontok között, amennyiben a Φ információhalmaz ismert a t időpontban.

Az árak alakulását a következő modellel írta le:

$$P_{z,t} = \frac{e^{\left(\frac{-z^2}{4\pi k^2 t}\right)}}{2\pi k\sqrt{t}} \ ,$$

ahol a $P_{z,t}$ árfolyam valószínűségét mutatja t-ik időpillanatban, k konstans.

Bachelier doktori értekezését empirikus vizsgálatokkal nem igazolta, ennek ellenére ezen elmélet számít az első tudományos munkának, amely az árfolyam-alakulásokat vizsgálta.

2.3. Martingálok

A martingál folyamat definíciója hasonlít a fair játszmához, de ahhoz képest egy szigorítást köt meg. Adott Φ_t információhalmaz esetén a következő időszakban realizálható hozam megegyezik az előző időszak hozamával.

$$E(r_{i,t+1} \mid \phi_t) = r_{i,t} \ .$$

A Φ_t információhalmaz nem jelent mást, mint a múltbeli árfolyamok változását. Ez az összes információ minden befektető számára. Így kapjuk, hogy:

$$E(r_{i,t+1} \mid r_{i,t}, r_{i,t-1}, ..., r_{i,t-n}) = r_{i,t} \ .$$

Ez azt jelenti, hogy az eszköz ára egy szubmartingál folyamatot követ. Az eszköz ára a következő időszakban nagyobb lesz, mivel a befektetők pozitív pénzáramlatra számítanak, vagyis:

$$E(P_{i,t+1} \mid P_{i,t}, P_{i,t-1}, ..., P_{i,t-n}) > P_{i,t} \ .$$

2.4. Brown-mozgás – Bolyongás

Mindannyian hallottunk már Brown skót biológusról. Az 1827-ben virágpollenekkel végzett kísérletei során arra a következtetésre jutott, hogy a pollenek nyugodt folyadékban is rendszertelen, összevissza mozgást végeznek. Brown megfigyeléseinek kvantitatív leírása 1905-ig váratott magára, amikor is Einstein rájött, hogy a pollenek Brown-mozgását a vízmolekulák termodinamikája idézi elő. A polleneket a véletlenszerűen nekiütköző vízmolekulák irányítják. Mindez igaz, de kérdezhetjük: ennek mi köze is van valójában a részvények alakulásának árfolyamában? A válasz egyszerű: képzeljük el a pollenek helyett a részvények árát és a vízmolekulák helyett a piacra bekerülő új információt. Ha az információnak pozitív tartalma van, akkor az ár növekszik, ellenkező esetben csökken (kétdimenziós Brown-mozgás).

Einstein a Brown-mozgást sztochasztikus folyamatként írta le. A porszem helye t időpontban Y_t. A folyamat a következő tulajdonságokkal bír:

1. Y_t folytonos,
2. $Y_{t+h} - Y_t$ standard normális eloszlású,
3. bármely $Y_{t(2)} - Y_{t(1)}$ különbség független a $Y_{t(4)} - Y_{t(3)}$ különbségtől, ahol $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$,
4. a folyamat stacionárius, vagyis bármely h>0 esetben a $Y_{t+h} - Y_t$ különbség független t-től. Másképpen az Y_t sztochasztikus folyamat ($Y_{t(1)}$, $Y_{t(2)}$, $Y_{t(3)}$, $Y_{t(4)}$, $Y_{t(n-1)}$) változó együttes eloszlásfüggvénye azonos a ($Y_{t(1)+h}$, $Y_{t(2)+h}$, $Y_{t(3)+h}$, $Y_{t(4)+h}$, $Y_{t(n-1)+h}$) változó együttes eloszlásfüggvényével.

A harmadik feltétel szerint az árak múltbeli értékei nincsenek hatással a jövőbeli értékekre, vagyis a múltbeli árvizsgálatok alapján nem lehet előjelezni az áralakulást (Markov-folyamat). 1920-ban igazolta egy amerikai matematikus, nevezetesen Wiener, hogy tényleg létezik ilyen folyamat. Ez a folyamat a következőképpen adható meg:

$$\Delta Y = \varepsilon\sqrt{\Delta t}\,,$$

ahol ε egy standard normál eloszlású valószínűségi változó.

A részvények és egyéb pénzügyi eszközök árfolyamát az általánosított Wiener-folyamat adja meg, amely egy növekedési rátát is tartalmaz.

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}\,,$$

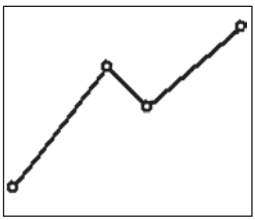
ahol a,b konstansok, Δx standard normál eloszlású változó.

2.5 Fraktálok

A fraktálok önhasonló komplex matematikai alakzatok. Az elnevezést Benoit Mandelbrot adta. A természetben is több önmagához hasonló alakzatot találunk, erre a legnépszerűbb példa a páfrány, de megtalálhatóak a fraktálok a gazdaságtanban is.

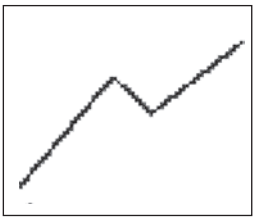
Ha ábrázoljuk az árfolyamváltozásokat 10 éven át, az majd egyéves változást és hónapos, illetve heti változásokat nézzük, arra a következtetésre jutunk, hogy ezek egymásra hasonlítanak. Bármekkora időintervallumon is ábrázolva az árfolyamváltozásokat, ugyanazon növekedések, csökkenések láthatók szabálytalanul eloszolva.

Lássuk egy egyszerű példán keresztül a fraktálokkal való modellezést. Vizsgáljunk meg egy árfolyamváltozást négy időpillanatban. Első időpillanatról a másodikra növekedjen, majd a második és harmadik között csökkenés legyen, majd végül a harmadik és negyedik között egy újabb növekedés legyen, az ábrán látható módon:

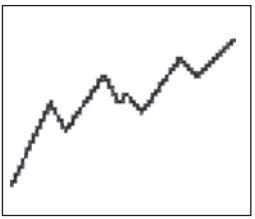


1. ábra

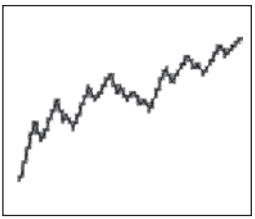
A következő lépésben iktassunk be újabb két-két pontot minden eddigi egymást követő pont közé. Ezen pontokat úgy rendezzük el, hogy az eredeti ábrához hasonló legyen minden egyes kis szakaszon. A könnyebb megértés kedvéért lássunk egy szemléltetést.



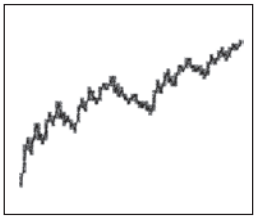
2. ábra. Mélység: 1



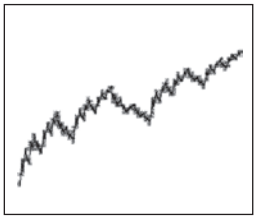
3. ábra. Mélység: 2



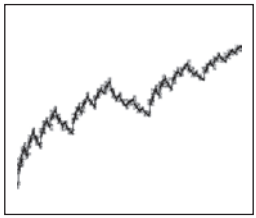
4. ábra. Mélység: 3



5. ábra. Mélység: 4



6. ábra. Mélység: 5



7. ábra. Mélység: 6

2.6. Pareto-eloszlás

Mivel sok volt az ellenérv a bolyongás ellen, de ugyanakkor még több szólt mellette, ezért Mandelbrot a bolyongás alapjait kezdte vizsgálni. Feltette a kérdést, hogy az árak változása tényleg normális eloszlású-e. Nos szerinte nem, hanem Levy-féle Pareto-eloszlású az árak változása. A Pareto-eloszlás karakterisztikus eloszlásfüggvénye:

$$\ln f(t) = \ln \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyt} dP(Y < y) = i\delta t - \gamma |t|^{\alpha} (1 + i\beta \frac{t}{|t|} \tan(\frac{\alpha\pi}{2})) \quad ,$$

ahol az eloszlás paraméterei α, β, γ és δ. Az α paraméter az eloszlás széleinek vastagságát írja le. Amennyiben α=2, akkor újból a normális eloszlással állunk szemben. Ha 0< α<2, akkor az eloszlás szélei vastagok. A β paraméter az eloszlás ferdeségét határozza meg. Értékei -1 és 1 között változhatnak, negatív β balra nyúló eloszlás, pozitív β jobbra nyúló eloszlást adnak. A γ az eloszlás szétterjedését, valószínűségi változó szóródását leíró skálaparaméter. Az utolsó, vagyis δ paraméter az eloszlás várható értékét adja meg, amennyiben α>1. A Pareto-eloszlás fontos tulajdonsága a stabilitás, minden Pareto-eloszlás összege is Pareto-eloszlás. Minden független, azonos eloszlású változó összegének eloszlása is Pareto-eloszlás (amennyiben a változók varianciája véges, akkor az összegük normális eloszlású lesz).

Az árfolyamváltozások vizsgálata rövid távú intervallumon belül nem Pareto-eloszlásúak, de az időintervallum növelésével közelítenek a Pareto-eloszláshoz. Medvegyev magyar matematikus is ezeken a területeken vizsgálódott, és arra a következtetésre jutott, hogy egyhónapos időintervallum esetén α már közelíti a 2-t.

3. Alkalmazások

3.1. Modellezés fraktálokkal

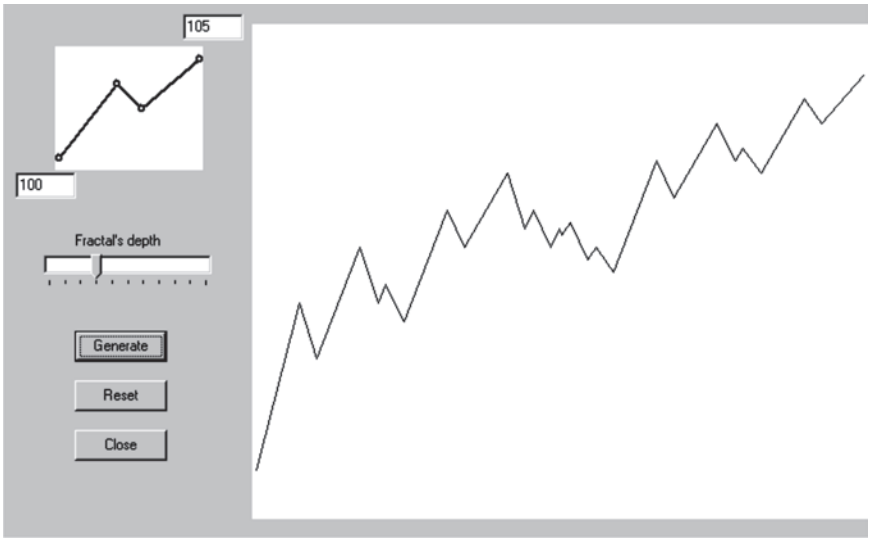
Algoritmus

Az alkalmazás, amit ehhez a részhez készítettem, az elmélet vizuális bemutatása. A program működése a fraktálok generálásának algoritmusán alapszik. Első lépésként felépítjük az egymélységű fraktált. Majd az újonnan keletkezett pontok közötti

szakaszokon ismételjük az első lépést, így már kétmélységű fraktál keletkezik. Ezt az algoritmust folytatva folyamatosan építhetjük a fraktálunkat, újabb és újabb mélységekbe lépve. A program tízes mélységig képes fraktálokat legenerálni.

Felhasználói útmutató

A program rendelkezik egy bemeneti adatokat tartalmazó résszel, ezek mellett egy nagyobb ablakban a szimulálás eredménye látható. A bal felső ablakban található kis képen egy egyszerű árfolyamváltozást láthatunk, melynél be lehet állítani az értékeket, hogy mennyi volt és mennyi lett a termék ára. Az árfolyamváltozás négy időpontot szemléltet, melyek közti időtáv nem feltétlenül egyenlő. Ezek nagysága, iránya változtatható, ha a piros gömböket a bal egérgomb lenyomásával mozgatjuk. A fraktálok generálásán a mélységet egy görgősávval állíthatjuk. Ennek minimális mélysége egy, illetve a maximális mélység 10. Azért csak tíz, mert ilyen kis kimeneti felületen nagyobb mélységet nem lehet megfelelőképpen szemléltetni. Lássunk egy példát a görgősáv változtatására, eleinte csak négyes mélységen vizsgáljuk meg az árfolyamváltozást, adott bemeneti adatok segítségével.



8. ábra. Fraktálmodellezés

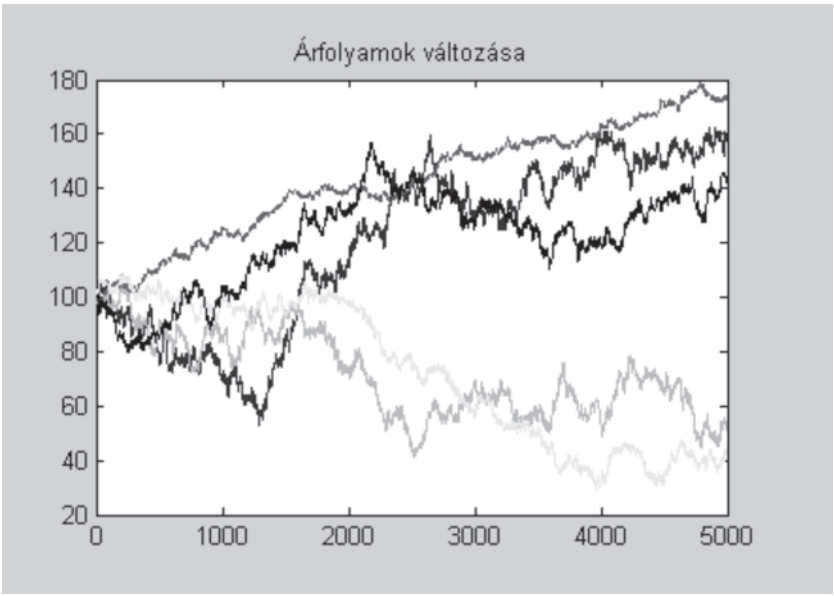
A bemeneti adatok alatt három gomb található. A generate hatására jelenik meg a nagyobb ablakban a bemeneti adatokból elkészített fraktál. A *reset* gomb törli a képernyőt és megengedi a bemeneti adatok újbóli változtatását. A *close* gombbal egyszerűen lezárjuk az alkalmazást.

3.2. Tőkepiacok működésének modellezése

A második alkalmazás egy kisebb tőkepiacot modellez MATLAB-ban. Ezen piacon öt részvény található. A részvények árfolyamváltozását az általánosított Wiener-folyamattal generálom:

$$\Delta x = a\Delta t + b\varepsilon\sqrt{\Delta t}\ .$$

Az egyszerűség kedvéért az időpillanatok közti intervallumot egységnyi hosszúságúnak veszem, így a Δt és a $\sqrt{\Delta t}$ is egy lesz. Ez nagyban csökkenti az algoritmus futási idejét. A „a” és „b” értékeknek minden részvény esetén különböző értékeket vettem, minden esetben nulla és egy közötti számokat. A modellezés 5000 időegységen keresztül történik. A program futtatása során az ábrán látható képhez hasonló eredményeket kapunk.

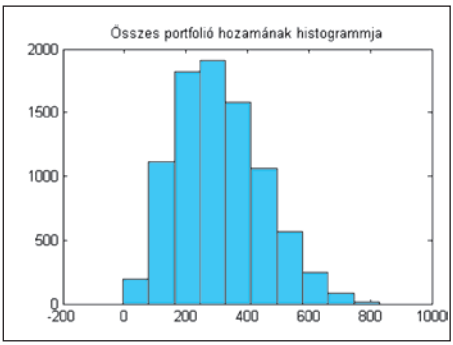


9. ábra. Árfolyamváltozások

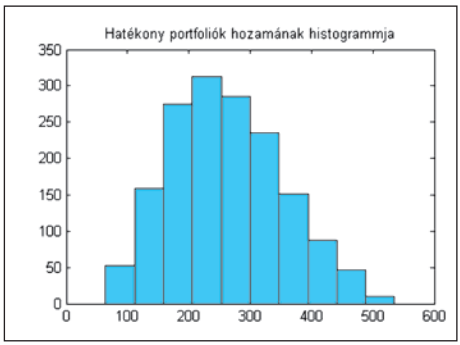
Ezen esetben a részvények árfolyama 100 egység, de ez gond nélkül változtatható. A jobb megfigyelés kedvéért minden részvény árfolyamváltozását különböző színnel rajzoltattam ki.

A programom a részvények árfolyamváltozását vizsgálja 4500 időegységen keresztül, majd ezek után kiszámolja a részvények várható értékét, szórását, illetve az egymás közti korrelációt. Ezen információk függvényében egy adott értékig képezem az összes portfóliót. Ezek után „megvásárolom” az összes legenerált portfóliót,

ezeket tartom 500 időegységen keresztül, majd az 5000. időpillanatban eladom az összes portfóliót. Ezek után vizsgálom a portfóliók hozamát. Az eredmény nem meglepő, ugyanis ahogy az elméletben is írtam, a hatékony portfóliók jobban teljesítenek, mint a többi. Az összes portfólió, illetve a hatékony portfóliók halmaza is tartanak a normális eloszláshoz, ezt nagyon jól mutatják a histogrammok is.



10. ábra. Összes portfólió



11. ábra. Hatékony portfólió

Irodalomjegyzék:

Molnár Márk András 2005. A hatékony piacok elméletének történeti előzményei. *Hitelintézeti Szemle*, 2005, negyedik évfolyam, 4. szám, 17–35.

Burton G. Malkiel 1992. *Bolyongás a Wall Streeten.* Budapest, Nemzetközi Bankárképző Központ

Benoit B. Mandelbrot 1997. *Fractals and Scaling in Finance.* New York, Hamilton Printing Company

http://www.budapestbank.hu/csoport/alapkezelo/hun/info-02.php

http://www.palya.hu/dolgozat/dolgozat.cfm?id=934

http://hu.wikipedia.org/wiki/K%C3%B6tv%C3%A9ny